HELM – a New Method of Calculating Power Flows in Power Grids

Author
Andrzej Mieczysław Wędzik

Keywords
power flows, HELM method, complex analysis

Abstract
Numerical algorithms based on iterative techniques have been used for a long time to analyse power flows in power systems. However, these methods do not guarantee that the commenced iterative process will always converge. At the same time, power flow equations have many solutions, and only one of them corresponds to the actual state of the concerned power system's operation. HELM (*Holomorphic Embedding Load-Flow Method*) was developed to overcome these limitations. It employs complex analysis techniques. Its most important feature is that if a solution exists, it corresponds to the actual state of the system's operation. However, where no solution exists, it unambiguously warns that there will be a voltage avalanche (*blackout*). The method's very important characteristic is that it is recurrent and not iterative like the classical algorithms. Its potential and the options of its use in real-time applications for many operations related to power system performance have been demonstrated so far in a few publications. The paper presents the main assumptions of the HELM method and how basic components of the power system model can be mapped using the complex analysis technique. It also compares HELM calculations with those made with classical iterative methods.

DOI: 10.12736/issn.2330-3022.2019105

Received: 23.02.2019
Received in revised form: 21.05.2019
Accepted: 24.05.2019
Available online: 30.08.2019

1. Introduction

Numerical methods based on iterative techniques have been used for a long time to analyse power flows in power systems. The most well-known ones include the methods of Gauss-Seidel, Newton-Raphson, Fast Decoupled Load Flow and other, which are most often variants of the previously mentioned methods. All of these methods are successfully used in power flow calculations by professional and publicly available programs alike.

However, the aforementioned iterative methods have some well-known imperfections with a greater or lesser impact on the calculation process and its results. The iterative methods' most important imperfections include:

- no guarantee that the iterative process will always converge
- multiple solutions – since power system equations have many solutions, it cannot always be controlled which of them will actually converge.

At the same time, it is known that only one solution to a power flow equation corresponds to the concerned power system's actual operating state. In this case, if the calculations starting point is not close enough to the solution sought, the iterative methods may not only not converge, but also may converge to a false solution.

The HELM method was developed to overcome these limitations of the classical methods used so far. HELM is a completely new and innovative method of solving equations describing steady states of power systems. The method employs complex analysis techniques. Its most important feature, however, is that:

- the solution, if it exists, corresponds to the actual state of the power system's operation (regardless of the choice of the starting point)
- it unambiguously warns that if there is no solution, the system will experience a voltage avalanche (*blackout*).

The method's very important characteristic is that it is recurrent and not iterative like the classical algorithms.

The HELM method was developed by Antonio Trias. It was patented in the USA (2004–2011) as an integral part of a new system for power transmission and distribution grids monitoring and management [1–4].

The HELM method itself was published for the first time in 2012 [5]. The publication described the mathematical foundations of the *holomorphic embedding method* used for a system with *PQ* type nodes. On an example of a 2-machine system, the principle and its possible applications is presented.
Subramanian et al. [6] for the first time demonstrated how to model *PV* type nodes in the HELM method. They also presented a way to solve the solution accuracy problem in the case of holomorphic embedding of *PV* type nodes.
Baghsorkhi and Suetin [7] presented the HELM method's possible applications to calculate power flows in power grids with the *PV* nodes for which voltage constraints were determined. This issue is directly related to the possibilities of modelling voltage regulators in the discussed method.
Trias in [8] described in detail the theoretical foundations of the HELM method: how to build a holomorphic embedding to correctly solve equations describing power flows in the power system, how to use standard analytical techniques for practical calculations, how to extend the method in order to adapt it to variable control elements, such as *PV* type nodes.
Suetin and Baghsorkhi [9] and Rao et al [10] presented in an orderly manner: mathematical models of power system elements so far developed and used in the HELM method, the most frequently used methods of solving the equations forming the flow model, impact of selected holomorphic embeddings on building models of power system components, calculations of germ solutions, and operation of the recursive algorithm used in the HELM method.
Trias and Marín [11] presented the HELM method's possible applications for solving power flows in DC systems.
Wallace et al. in [12] presented an alternative method for including *PV* type nodes in the HELM method.
Basiri-Kejani and Gholipour [13] presented the possibilities of modelling of control devices in the discussed method. Their main considerations focused on FACTS type controls.
Liu et al. [14] presented a concept of the multidimensional HELM method. Their main aim was to obtain an unambiguous approximation of the analytical power flow solution by finding a physical germ solution and the use of an arbitrary holomorphic embedding for each power generated and each load or groups of loads.
Santos et al [15] and Sauter et al [16] analytically compared the HELM method variants developed so far with classical flow algorithms.
Trias and Marín [17] analysed the application of the Padé-Weierstrass technique to solving the power flow problem and its implications for improving the accuracy of the HELM method's results.
Chiang et al. [18] proposed a new version of the HELM method. They found their solution faster and more flexible in operation.
Feng and Tylavsky [19] focused on the HELM method's application to find flow equations solutions most interesting from the point of view of power system voltage stability.
Liu et al. [20] proposed an Internet-based system for assessing voltage stability in a steady state, used to assess the probability of a voltage avalanche in the power system.
So far, the few publications described above, which refer to the presented method, have demonstrated that it is more efficient than and competitive to classical iterative methods. They showed the method's great potential and possible uses in real-time applications for many operations related to the power system performance, such as: failure analysis, optimal power flows, building scenarios for system recovery after failures. This is particularly important from the point of view of the increasingly widespread introduction of smart real time applications, the main purpose of which is to support grid operators where there is no time to manually tune devices, until convergence of calculations is achieved.
This paper presents the main assumptions of the HELM method and how to build power system models using the complex analysis technique. The calculations are compared with classical iterative methods.

2. Mathematical model of the HELM method

For any node *i* of power grid consisting of *N* nodes, the equation binding the basic electrical quantities can be written in the form of:

$$S_i = V_i \cdot I_i^* = V_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k \right)^* = V_i \cdot \sum_{k=0}^{N} Y_{ik}^* \cdot V_k^* \tag{1}$$

where: the quantities in it indicate complex values, respectively: S_i – power in node *i*, V_i – voltage in node *i*, I_i – current in node *i*, Y_{ik} – elements of the admittance matrix mapping connections in the grid. Indices (*) indicate conjugate values.
Equation (1) had become the basis for the formulation of a new power flow calculation method based on the holomorphic embedding method. In the method's first versions [1–5], power system nodes were modelled as *PQ* type nodes. For such a case equation (1), after appropriate transformations, can be written as:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k = \frac{S_i^*}{V_i^*}, \quad \text{for} \quad i \in PQ \tag{2}$$

Equation (2) represents the basic record of flow equations describing the state of *PQ* type nodes. Although in practice only a few nodes in an extensive power system are described thus, the above case can be treated as a starting point to describe the HELM method's operating principle and to develop its model.
The holomorphic function is a function defined on an open subset of the plane of complex numbers C with values contained in this set, which is differentiable in complex terms at every point of this subset. The function's holomorphicity is a condition much stronger than differentiability in real terms, because a function with this property is infinitely differentiable, which makes it representable by Taylor's formula (series).
Equation (2) is an algebraic equation the solution of which is the searched-for vector of nodal voltage with components V_i. However, an equation in this form is not holomorphic, because the Cauchy-Riemann conditions are not met due to the occurrence of complex quantities.

To change this situation, the HELM method proposes embedding the original algebraic equations in their functional holomorphic extension. With this treatment many properties of the complex analysis, unavailable or limited in solving algebraic equations, can be used.

Embedding is a multi-valued mapping of object A into object B, which preserves the properties of the embedded object (the properties concerned depend on the considered theory). Embedding implies the existence in object B of a subset "identical" to object A.

The embedding proposed in the HELM method consists in entering complex variable z into equation (2) in such a way that voltages V_i, V_k become functions of this new variable. Embedding can be done in any way. For the *PQ* type nodes described by equation (2), the holomorphic embedding may take the following form:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k(z) = \frac{z \cdot S_i^*}{V_i^*(z^*)}, \quad \text{for} \quad i \in PQ \tag{3}$$

where: $V_i^*(z^*)$ is a holomorphic, conjugate function of the conjugate variable z. This expression is not equivalent to a function $V_i^*(z)$!

The functional dependence in equation (3) of nodal voltage on complex variable z is a holomorphic function. In addition, the voltages in the system nodes meet the following dependencies, resulting from the holomorphic embedded applied:

$$V_k(0) = 1 \quad \forall\, k \in PQ \tag{4}$$

$$V_k(1) = V_k \quad \forall\, k \in PQ \tag{5}$$

$$V_{slack}(z) = V_{slack} \tag{6}$$

It should be noted that the holomorphic embedding used in equation (3) implies the following limit cases:

- solution for $z = 0$ represents the grid operation without load and generation in the power system nodes – this is called a *germ solution*.
- solution for $z = 1$ represents the determination of the grid operating point for the full flow model.

The method's additional characteristic is that it is recurrent and not iterative like the classical algorithms.

3. Problem solving methods

The holomorphic embedding function *V(z)* a holomorphic function of complex variable *z*. In practice, this means that the problem of power flows in the power system is solved by the HELM method in a function space in which functions and variables are complex numbers. One of the methods used to solve this type of problem is the power series method.

Power series method

Using one of the fundamental features of holomorphic functions, function *V(z)* can be represented as Maclaurin series, which is a particular form of Taylor series. In general, it is a power series with coefficients that are complex functions, dependent on complex variables of this series. Such a series is formulated as follows:

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V[n] \cdot z^n \tag{7}$$

In addition, for holomorphic function *V(z)* the following dependencies are met, which are obligatory when it is developed into the Maclaurin series:

$$V^*(z) = V^*[0] + V^*[1] \cdot z^* + V^*[2] \cdot (z^*)^2 + \ldots + V^*[n] \cdot (z^*)^n \tag{8}$$

$$V^*(z^*) = V^*[0] + V^*[1] \cdot z + V^*[2] \cdot z^2 + \ldots + V^*[n] \cdot z^n \tag{9}$$

Since in equation (3) function *V*(z*)* is in the denominator, it is convenient to enter function *W(z)* determined as follows:

$$W(z) = \frac{1}{V(z)} \tag{10}$$

From equation (10) it follows directly that:

$$\left(W[0] + W[1] \cdot z + \ldots + W[n] \cdot z^n\right) \cdot \left(V[0] + V[1] \cdot z + \ldots + V[n] \cdot z^n\right) = 1 \tag{11}$$

By multiplying the power series in equation (10), the formulas can be determined that allow calculating the values of functional coefficients *W*[*n*]:

$$W[0] = \frac{1}{V[0]} \tag{12}$$

$$W[n] = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} W[m] \cdot V[n-m]}{V[0]}, \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \tag{13}$$

Based on the above relationships, the functional values of coefficients *V*[*n*] can be calculated after formula:

$$V[n] = S^* \cdot W^*[n-1], \quad \text{dla} \quad n > 0 \tag{14}$$

Thus equation (3) of the state of *PQ*, type nodes, will take the form:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k[n] = S_i^* \cdot W_i^*[n-1], \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{15}$$

Another approach applied to calculations by the HELM method is *continued fraction* approximation.

Continued fraction approximation

Theoretically, there are many ways to transform the original power series described by equation (7) into a continued fraction which approximates this series. One possible form of this transformation is as follows:

$$\begin{aligned} V(z) &= V[0]+V[1]\cdot z+V[2]\cdot z^2+\ldots+V[n]\cdot z^n = \\ &= V[0]+z\cdot\left(V[1]+V[2]\cdot z+\ldots+V[n]\cdot z^{n-1}\right)= \\ &= V[0]+\cfrac{z}{\cfrac{1}{V[1]+V[2]\cdot z+\ldots+V[n]\cdot z^{n-1}}}= \\ &= V[0]+\frac{z}{V^{(1)}(z)} \end{aligned} \tag{16}$$

The last expression in equation (16) can be written in the form of a recursive expression that allows calculating the value of the sought function $V(z)$:

$$V(z)=V[0]+\cfrac{z}{V^{(1)}[0]+\cfrac{z}{V^{(2)}[0]+\cfrac{z}{V^{(3)}[0]+\ldots}}} \tag{17}$$

By reference to the previous comments it should be noted that the value of function $V(z)$, defining the operating voltage in all N grid nodes represented in the flow model, is obtained directly from equation (17), assuming value $z = 1$.

There are many other methods that can be used to solve the issues described in the HELM method. Only the methods most popular and most widely applied in the studies published so far are described above.

4. Consideration of actual states of the power system operation

Equation (2) and corresponding holomorphic embedding (3) describe the operating state of *PQ* type nodes. From a practical point of view, this approach is not sufficient to describe the full power flows in an extensive power system. The complete computational model must also represent other types of nodes and devices. Work on these issues is currently at the initial stage, but the first studies have already been developed that take into account the complexity of the power system operation. The forms of holomorphic embedding can be infinite. The most important of them, which have been implemented in practice, are presented below.

Extended model of *PQ* type nodes

In this model the two following components were separated from elements of admittance matrix Y_{ik}: Y_{ik}^{tr}– component corresponding to "serial branches" and Y_i^{sh}– component corresponding to "shunt elements". Such representation of *PQ* type nodes allows for mapping of *shunt elements* (reactors, capacitors, etc.) and facilitates modelling of transformers. Flow equations for the described case take the form:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}^{tr}\cdot V_k = \frac{S_i^*}{V_i^*} - Y_i^{sh}\cdot V_i\ , \quad \text{for} \quad i\in PQ \tag{18}$$

Holomorphic embedding for equation (18) will take the form:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k\ (z) = \frac{z\cdot S_i^*}{V_i^*(z^*)} - z\cdot Y_i^{sh}\cdot V_i\ (z), \quad \text{for} \quad i\in PQ \tag{18a}$$

Whereas the mathematical model used in the HELM method, corresponding to equation (18a), will take the form:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k\ [n] = S_i^*\cdot W_i^*[n-1] - Y_i^{sh}\cdot V_i\ [n-1], \quad \text{for} \quad i\in PQ \tag{18b}$$

PV type node model

For *PV* type nodes the voltage module $|V_i|$ and the active power output P_i are known. The unknown quantities are the voltage angle and reactive node power Q_i. The respective holomorphic embedding equations that represent the reactive power calculation method can be formulated as follows:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k\ (z) = \frac{z\cdot S_{iconst}^* - jQ_i(z)}{V_i^*(z^*)} - z\cdot Y_i^{sh}\cdot V_i\ (z), \quad \text{for} \quad i\in PV \tag{19}$$

where: S_{iconst}^* is the conjugate value of the constant (unchangeable) power S_i in node i.

The mathematical model used in the HELM method, corresponding to equation (19), will take the form:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k\ [n] + jQ_i[n] = \\ &= S_{iconst}^*\cdot W_i^*[n-1] - j\left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m]\cdot W_i^*[n-m]\right) - Y_i^{sh}\cdot V_i\ [n-1], \\ &\qquad \text{for} \quad i\in PV \end{aligned} \tag{19a}$$

At the same time, the holomorphic embedding that represents the condition of voltage module $|V_i|$, can be formulated as:

$$V_i(z)\cdot V_i^*(z^*) = 1 + z\cdot\left(\left|V_i^{zad}\right|^2 - 1\right), \quad \text{for} \quad i\in PV \tag{20}$$

where: V_i^{zad} is the specified voltage magnitude in node i.

The mathematical model used in the HELM method, corresponding to equation (20), will take the form:

$$V_i^{\mathrm{re}}[n] = \begin{cases} 1, \quad \text{for } n = 0, \\ \dfrac{\left(V_i^{zad}\right)^2 - 1}{2}, \quad \text{for } n = 1, \\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{n-1} V_i[m]\cdot V_i^*[n-m], \quad \text{for } n = 2, 3, \ldots n\text{-}1, \end{cases}$$
$$\text{for} \quad i \in PV \tag{21}$$

The above equations are only a small representation of the mathematical models that make up the description of complex processes occurring in a real power system. Work on this has only just begun. It is to be hoped that with each new development, the library of available models allowing their representation and application in the HELM method will be enriched.

5. Calculation examples

In order to test the HELM method's effectiveness, comparative analyses were carried out with a professional program for power flow calculation, PSS®E by Siemens PTI. Standard 3-, 14- and 118-node IEEE power system models were used for the calculations. The models were adapted to the specifics of the holomorphic embeddings developed and described before. For this reason, for example, the ability to control transformer ratios has been blocked in the IEEE models. All constraints and requirements for *PV* type nodes have been retained, such as fixed voltage levels and reactive power limits of generators. The calculations in Siemens PTI's PSS®E program were performed using the full Newton-Raphson method.

The calculations were made on a computer with an Intel® Core-™ i7-6700 HQ 2.6 GHz processor with a 64-bit MS Windows 10 Pro operating system. The HELM method algorithm was written in Python 3.6.

Results of the comparative calculations are presented in Tab. 1.

Model	PSS®E		HELM	
	CPU usage [ms]	Accuracy [MVA]	CPU usage [ms]	Accuracy [MVA]
3-bus	38.823.	5,960E-06	24.495.	3,786E-05
14-bus	63.732.	2,227E-05	42.536.	4,413E-12
118-bus	56.567.	4,134E-04	300.137.	1,333E-08

Tab. 1. Comparative analysis of flow calculations by PSS®E program and HELM method

6. Conclusions

The HELM method is a completely new and innovative method of solving equations describing steady states of power systems. The first theoretical works indicate the method's great potential and applicability. This is also confirmed by the calculations carried out by this author. The results presented in Tab. 1 show that:

- calculations by the HELM method are highly accurate, regardless of the analysed grid size
- for a grid with a small number of nodes, the computation time is comparable or shorter than in classical methods
- with increase in the problem dimensions, the duration of computation by the HELM method increases significantly.

However, it should be remembered that the computation time in the HELM method is not of prime concern. Much more important are the method's features due to the holomorphic embedding and the "transfer" of the power flow problem to the plane of complex numbers C, while embedding the original algebraic equations into their functional holomorphic extension. The solution's unambiguity (or the lack of it) obtained with such a transformation allows one to optimistically think, for example, about the HELM method's applicability in real-time systems used to control the operation of a complex power system.

7. Future research directions

Theoretical and development work on the HELM method is at an early stage. So far, only some of the issues that are necessary to develop a fully functional power flow calculation method in real power systems have been worked out in a satisfactory way. Theoretical works should include the following critical elements:

- modelling of control elements, such as regulating transformers, phase shifters, FACTS devices, etc.
- modelling that reflect various workloads (current model, admittance model etc.).

Equally important as modelling power system components should be considered the need to search for new and more efficient methods of calculating functional variables, which are the solution to the power flow problem in the HELM method. Accuracy and speed of the function solution approximation play an important role in the calculation process and determine the entire method's effectiveness and efficiency.

Finally, it should be noted that the HELM method has been commercialized and is now owned by Gridquant Inc. According to commercial information, this company offers a fully functional version of the program that allows calculating very large power grids. However, the way this program works, and the details of modelling individual grid components are business secrets of the company. An additional incentive to intensify research works is the very high price that Gridquant Inc. demands for the program, and this also applies to its academic version.

REFERENCES

1. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2004/0158417 A1, Pub. Date: Aug. 12, 2004.
2. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2006/0111860 A1, Pub. Date: May 25, 2006.

3. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2009/0228154 A1, Pub. Date: Sep. 10, 2009.
4. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent, Patent No.: US 7,979,239 B2, Date of Patent: Jul. 12, 2011.
5. Trias A., The Holomorphic Embedding Load Flow Method, 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting, July 2012, pp. 1–8, ISSN: 1932, -5517, doi: 10.1109/PESGM.2012.6344759.
6. Subramanian M.K., Feng Y., Tylavsky D., PV bus modeling in a holomorphically embedded power-flow formulation, 2013 North American Power Symposium (NAPS), September 2013, doi: 10.1109/NAPS.2013.6666940, pp. 1–6.
7. Baghsorkhi S.S., Suetin S.P., Embedding AC Power Flow with Voltage Control in the Complex Plane: The Case of Analytic Continuation via Padé Approximants, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1504.03249, 2015, arXiv: 1504.03249 [online], http://arxiv.org/abs/1504.03249 [access: 21/11/2016]
8. Trias A., Fundamentals of the Holomorphic Embedding Load-Flow Method, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1509.02421, 2015, arXiv: 1509.02421 [online], http://arxiv.org/abs/1509.02421 [access: 21/11/2016]
9. Suetin S.P., Baghsorkhi S.S., Embedding AC Power Flow in the Complex Plane Part I: Modelling and Mathematical Foundation, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1604.03425, 2016, arXiv: 1604.03425 [online], http://arxiv.org/abs/1604.03425 [access: 21/11/2016]
10. Rao S. et al., The Holomorphic Embedding Method Applied to the Power-Flow Problem, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 31, No. 5, 2016, pp. 3816–3828, doi: 10.1109/TPWRS.2015.2503423.
11. Trias A., Marín J.L., The Holomorphic Embedding Loadflow Method for DC Power Systems and Nonlinear DC Circuits, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, Vol. 63, No. 2, 2016, pp. 322–333, doi: 10.1109/TCSI.2015.2512723.
12. Wallace I. et al., Alternative PV Bus Modelling with the Holomorphic Embedding Load Flow Method, arXiv e-prints, July 2016, arXiv: 1607.00163 [online], https://ui.adsabs.harvard.edu/\#abs/2016arXiv160700163W [access: 17/10/2017].
13. Basiri-Kejani M., Gholipour E., Holomorphic Embedding Load-Flow Modeling of Thyristor-Based FACTS Controllers, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 32, No. 6, 2017, pp. 4871–4879, ISSN: 0885, -8950, doi: 10.1109/TPWRS.2017.2682117.
14. Liu C. et al., A Multi-Dimensional Holomorphic Embedding Method to Solve AC Power Flows, *IEEE Access* 2017, Vol. 5, pp. 25270-25285, ISSN: 2169, -3536, doi: 10.1109/ACCESS.2017.2768958.
15. Santos A.C., Freitas F.D., Fernandes L.F.J., Holomorphic embedding approach as an alternative method for solving the power flow problem, 2017 Workshop on Communication Networks and Power Systems (WCNPS), November 2017, pp. 1–4, doi: 10.1109/WCNPS.2017.8252933.
16. Sauter P.S. et al., Comparison of the Holomorphic Embedding Load Flow Method with Established Power Flow Algorithms and a New Hybrid Approach, March 2017 Ninth Annual IEEE Green Technologies Conference (GreenTech), 2017, pp. 203–210, ISSN: 2166, -5478, doi: 10.1109/GreenTech.2017.36.
17. Trias A., Marín J.L., A Padé-Weierstrass technique for the rigorous enforcement of control limits in power flow studies, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1707.04064, 2017, arXiv: 1707.04064 [online], url: http://arxiv.org/abs/1707.04064, [access: 13/07/2017]
18. Chiang H., Wang T., Sheng H., A Novel Fast and Flexible Holomorphic Embedding Power Flow Method, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 33, No. 3, 2018, pp. 2551–2562, ISSN: 0885, -8950, doi: 10.1109/TPWRS.2017.2750711.
19. Feng Y., Tylavsky D., A Holomorphic embedding approach for finding the Type-1 power-flow solutions, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 102, 2018, pp. 179–188, ISSN: 0142, -0615, doi: 10.1016/j.ijepes.2018.04.029.
20. Liu C. et al., Online Voltage Stability Assessment for Load Areas Based on the Holomorphic Embedding Method, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 33, No. 4, 2018, pp. 3720–3734, ISSN: 0885, -8950, doi: 10.1109/TPWRS.2017.2771384.

Andrzej Mieczysław Wędzik

Lodz University of Technology, Institute of Electrical Power

e-mail: andrzej.wedzik@p.lodz.pl

A graduate of Lodz University of Technology. Since 1986 in the Institute of Electrical Power Engineering of his alma mater, now as assistant professor. His research activity is focused on issues related to renewable energy, energy law, energy market and optimization. Since 2007 Chairman of the Central Section of Renewable Energy and Environmental Protection of SEP Association of Polish Electrical Engineers.

PL

HELM – nowa metoda obliczania rozpływów mocy w sieciach elektroenergetycznych

Autor
Andrzej Mieczysław Wędzik

Słowa kluczowe
rozpływy mocy, metoda HELM, analiza zespolona

Streszczenie
Do badania rozpływów mocy w systemach elektroenergetycznych od dawna używane są algorytmy numeryczne oparte na technikach iteracyjnych. Jednak metody te nie dają gwarancji, że rozpoczęty proces iteracyjny zawsze się zbiegnie. Jednocześnie równania opisujące rozpływy mocy mają wiele rozwiązań, a tylko jedno z nich odpowiada rzeczywistemu stanowi pracy badanego systemu elektroenergetycznego. Metoda HELM (ang. *Holomorphic Embedding Load Fload Method*) została opracowana w celu likwidacji powyższych ograniczeń. Metoda ta wykorzystuje techniki analizy zespolonej. Najważniejszą jej cechą jest to, że jeżeli rozwiązanie istnieje, wówczas odpowiada rzeczywistemu stanowi pracy systemu. Natomiast gdy rozwiązanie nie istnieje, wówczas jednoznacznie sygnalizuje, że wystąpi lawina napięcia (*blackout*). Bardzo ważną cechą metody jest to, że jest ona metodą rekurencyjną, a nie iteracyjną, jak w przypadku algorytmów klasycznych. W nielicznych publikacjach wykazano dotychczas duży potencjał metody i możliwości jej wykorzystania w aplikacjach działających w czasie rzeczywistym do wielu operacji związanych z funkcjonowaniem systemu elektroenergetycznego. W artykule przedstawiono główne założenia metody HELM i sposób odwzorowania podstawowych elementów modelu systemu elektroenergetycznego z wykorzystaniem techniki analizy zespolonej. Dokonano również porównania obliczeń wykonanych za pomocą metody HELM z obliczeniami przeprowadzonymi klasycznymi metodami iteracyjnymi.

Data wpływu do redakcji: 23.02.2019
Data wystawienia recenzji: 21.05.2019
Data akceptacji artykułu: 24.05.2019
Data publikacji online: 30.08.2019

1. Wprowadzenie

Do badania rozpływów mocy w systemach elektroenergetycznych od dawna używane są metody numeryczne oparte na technikach iteracyjnych. Do najbardziej znanych można zaliczyć: metodę Gaussa-Seidla, Newtona-Raphsona, Fast Decoupled Load Flow i inne, które najczęściej są wariantami wymienionych wcześniej metod. Wszystkie te metody stosowane są z powodzeniem w obliczeniach rozpływów mocy zarówno w programach profesjonalnych, jak i ogólnie dostępnych.

Jednak wymienione powyżej metody iteracyjne mają pewne ogólnie znane niedoskonałości, które w mniejszym lub większym stopniu wpływają na proces obliczeń i otrzymywane wyniki. Do najważniejszych niedoskonałości metod iteracyjnych należą:

- brak gwarancji, że rozpoczęty proces iteracyjny zawsze się zbiegnie
- wielość rozwiązań – ponieważ równania opisujące system elektroenergetyczny mają wiele rozwiązań, nie zawsze można kontrolować, do którego z nich aktualne rozwiązanie się zbiegnie.

Jednocześnie wiadomo, że tylko jedno z rozwiązań równania opisujące rozpływy mocy odpowiada rzeczywistemu stanowi pracy badanego systemu elektroenergetycznego. W takim przypadku, jeżeli punkt startowy obliczeń nie będzie znajdował się wystarczająco blisko poszukiwanego rozwiązania, to wówczas metody iteracyjne mogą nie tylko się nie zbiegać, ale zbiegać się do fałszywego rozwiązania.

Metoda HELM została opracowana w celu likwidacji powyższych ograniczeń, występujących w dotychczas wykorzystywanych metodach klasycznych. HELM jest całkowicie nową i nowatorską metodą rozwiązywania równań opisujących stany ustalone systemów elektroenergetycznych. Działanie metody oparte jest na wykorzystaniu technik analizy zespolonej. Najważniejszą jej cechą jest jednak to, że:

- znalezione rozwiązanie, jeżeli istnieje, odpowiada rzeczywistemu stanowi pracy badanego systemu elektroenergetycznego (bez względu na wybór punktu startowego)
- jednoznacznie sygnalizuje, jeżeli rozwiązanie nie istnieje, że wystąpi w systemie lawina napięcia (*blackout*).

Bardzo ważną cechą metody jest to, że jest ona metodą rekurencyjną, a nie iteracyjną, jak w przypadku algorytmów klasycznych.

Metoda HELM została opracowana przez Antonio Triasa. Opatentowano ją w USA (2004–2011) jako integralną część opracowanego systemu monitorowania i zarządzania elektroenergetycznymi sieciami przesyłowymi i dystrybucyjnymi [1–4].

Sama metoda HELM została opublikowana po raz pierwszy w 2012 roku [5]. W publikacji autor opisał podstawy matematyczne zastosowanej metody zanurzenia holomorficznego (ang. *Holomorphic Embedding Method*) w odniesieniu do systemu z węzłami typu *PQ*. Na przykładzie układu 2-maszynowego przedstawił zasadę i możliwości jej stosowania.

Subramanian i inni [6] po raz pierwszy przedstawili sposób modelowania węzłów typu *PV* w metodzie HELM. Zaprezentowali również sposób rozwikłania problemu dokładności rozwiązania w przypadku zastosowania zanurzenia holomorficznego dla węzłów typu *PV*.

Baghsorkhi i Suetin [7] przedstawili możliwości wykorzystania metody HELM do obliczeń rozpływów mocy w sieciach elektroenergetycznych z węzłami *PV*, dla których określono ograniczenia napięciowe. Zagadnienie to wiąże się bezpośrednio z możliwościami modelowania regulatorów napięcia w omawianej metodzie.

W publikacji [8] Trias w sposób szczegółowy opisał teoretyczne podstawy metody HELM: w jaki sposób należy budować zanurzenie holomorficzne w celu prawidłowego rozwiązania równań opisujących rozpływy mocy w systemie elektroenergetycznym, w jaki sposób stosować standardowe techniki analityczne do praktycznych obliczeń, jak rozszerzyć metodę, aby dostosować ją do zmiennych elementów sterujących, takich jak węzły typu *PV*.

Suetin i Baghsorkhi [9] oraz Rao i inni [10] w sposób uporządkowany przedstawili: opracowane dotychczas modele matematyczne elementów systemu elektroenergetycznego, wykorzystywane w metodzie HELM, najczęściej stosowane metody rozwiązania równań tworzących model rozpływowy, wpływ wybranych zanurzeń holomorficznych na budowanie modeli elementów systemu elektroenergetycznego, obliczenia rozwiązań kiełków (*germ solutions*) i działania samego, rekurencyjnego algorytmu stosowanego w metodzie HELM.

Trias i Marín [11] zaprezentowali możliwości wykorzystana metody HELM do rozwiązywania rozpływów mocy w systemach prądu stałego.

Wallace i inni w publikacji [12] zaprezentowali alternatywną metodę uwzględniania węzłów typu *PV* w metodzie HELM.

PL

Możliwości modelowania urządzeń regulacyjnych w omawianej metodzie przedstawili Basiri-Kejani i Gholipour [13]. Główne ich rozważania zostały skoncentrowane na regulatorach typu FACTS.

Liu i inni [14] zaprezentowali koncepcję wielowymiarowej metody HELM. Głównym zamierzeniem autorów było uzyskanie jednoznacznego przybliżenia analitycznego rozwiązania rozpływów mocy poprzez znalezienie fizycznego rozwiązania kiełka oraz zastosowanie arbitralnego zanurzenia holomorficznego dla każdej mocy generowanej, każdego obciążenia lub grup obciążeń.

Analizy porównawczej dotychczas opracowanych wariantów metody HELM z klasycznymi algorytmami rozpływowymi dokonali Santos i inni [15] oraz Sauter i inni [16].

Trias i Marín [17] poddali analizie zastosowanie techniki Padé-Weierstrass do rozwiązania problemu rozpływów mocy i jej wpływ na poprawę dokładności otrzymywanych wyników obliczeń w metodzie HELM.

Chiang i inni [18] zaproponowali nową wersję metody HELM. Według autorów ich rozwiązanie charakteryzuje się większą szybkością i elastycznością działania.

Na wykorzystaniu metody HELM do znalezienia rozwiązań równań rozpływowych, najbardziej interesujących z punktu widzenia oceny stabilności napięcia systemu elektroenergetycznego, skoncentrowali się Feng i Tylavsky [19].

Internetowy system oceny stabilności napięciowej w stanie ustalonym, wykorzystywany do oceny prawdopodobieństwa wystąpienia lawiny napięciowej w systemie elektroenergetycznym, zaproponowali Liu i inni [20].

Dotychczas nieliczne, opisane powyżej publikacje, które odnoszą się do prezentowanej metody, udowodniły, że w odniesieniu do klasycznych metod iteracyjnych jest ona wydajna i konkurencyjna. Wykazano w nich duży potencjał metody i możliwości jej wykorzystania w aplikacjach działających w czasie rzeczywistym do wielu operacji związanych z funkcjonowaniem systemu elektroenergetycznego, takich jak m.in.: analizy awaryjności, optymalne rozpływy mocy, budowanie scenariuszy odbudowy systemu po awariach. Jest to szczególnie istotne z punktu widzenia coraz szerszego wprowadzania inteligentnych aplikacji działających w czasie rzeczywistym, których głównym celem jest wspomaganie operatorów sieciowych w sytuacjach, gdy brakuje czasu na ręczne dostrojenie urządzeń, dopóki nie osiągnie się zbieżności prowadzonych obliczeń.

W artykule przedstawiono główne założenia metody HELM i sposób budowy modelu systemu elektroenergetycznego za pomocą techniki analizy zespolonej. Pokazano porównania obliczeń z klasycznymi metodami iteracyjnymi.

2. Model matematyczny metody HELM

Dla dowolnego węzła i sieci elektroenergetycznej, składającej się z N węzłów, można zapisać równanie wiążące ze sobą podstawowe wielkości elektryczne w postaci:

$$S_i = V_i \cdot I_i^* = V_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k \right)^* = V_i \cdot \sum_{k=0}^{N} Y_{ik}^* \cdot V_k^* \tag{1}$$

gdzie: występujące w nim wielkości oznaczają wartości zespolone odpowiednio: S_i – mocy węzła i, V_i – napięcia węzła i, I_i – wartości prądu węzła i, Y_{ik} – elementów macierzy admitancji odwzorowującej połączenia w rozważanej sieci elektroenergetycznej. Indeksy (*) oznaczają wartości sprzężone.

Równanie (1) stało się podstawą do sformułowania nowej metody obliczania rozpływów mocy, która oparta została na metodzie zanurzenia holomorficznego. W pierwszych opracowanych wersjach omawianej metody [1–5] węzły systemu elektroenergetycznego były modelowane jako węzły typu PQ. Dla takiego przypadku równanie (1), po odpowiednich przekształceniach, można zapisać w postaci:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k = \frac{S_i^*}{V_i^*}, \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{2}$$

Równanie (2) przedstawia sobą podstawowy zapis równań rozpływowych, opisujących stan pracy węzłów typu PQ. Chociaż w praktyce tylko nieliczne węzły w rozległym systemie elektroenergetycznym opisywane są w ten sposób, to jednak powyższy przypadek można potraktować jako punkt wyjścia do opisu zasady działania i tworzenia modelu metody HELM.

Funkcja holomorficzna jest funkcją zdefiniowaną na otwartym podzbiorze płaszczyzny liczb zespolonych C o wartościach zawartych w tym zbiorze, która jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie tego podzbioru. Holomorficzność funkcji jest warunkiem dużo silniejszym niż różniczkowalność w sensie rzeczywistym, gdyż funkcja o tej własności jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, przez co może być przedstawiona za pomocą wzoru (szeregu) Taylora.

Równanie (2) jest równaniem algebraicznym, którego rozwiązaniem jest poszukiwany wektor napięć węzłowych o składowych V_i. Jednak równanie w tej formie nie jest holomorficzne, ponieważ warunki Cauchy'ego-Riemanna nie są spełnione ze względu na występowanie wielkości sprzężonych.

Aby zmienić tę sytuację, w metodzie HELM proponuje się zanurzenie oryginalnych równań algebraicznych w ich funkcjonalne holomorficzne rozszerzenie. Dzięki takiemu zabiegowi możliwe będzie wykorzystanie wielu właściwości analizy zespolonej, niedostępnych lub ograniczonych w rozwiązywaniu równań algebraicznych.

Zanurzenie (włożenie) jest odwzorowaniem różnowartościowym obiektu A w obiekt B, zachowującym własności obiektu zanurzanego (to, o jakie własności chodzi, zależy od rozważanej teorii). Istnienie zanurzenia implikuje istnienie w obiekcie B podzbioru „identycznego" z obiektem A.

W metodzie HELM proponowane zanurzenie polega na wprowadzeniu zmiennej zespolonej z do równania (2) w taki sposób, aby napięcia V_i, V_k stały się funkcjami tej nowej zmiennej. Zanurzenia można dokonać w dowolny sposób. Dla opisanych równaniem (2) węzłów typu PQ zanurzenie holomorficzne może przyjąć następującą postać:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} \cdot V_k(z) = \frac{z \cdot S_i^*}{V_i^*(z^*)}, \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{3}$$

gdzie: $V_i^*(z^*)$ jest holomorficzną, sprzężoną funkcją sprzężonej zmiennej z. Wyrażenie to nie jest równoważne funkcji $V_i^*(z)$!

Występująca w równaniu (3) zależność funkcyjna napięcia węzłowego od zmiennej zespolonej z jest funkcją holomorficzną. Dodatkowo napięcia w węzłach systemu spełniają następujące zależności, wynikające z zastosowanego zanurzenia holomorficznego:

$$V_k(0) = 1 \quad \forall\, k \in PQ \tag{4}$$

$$V_k(1) = V_k \quad \forall\, k \in PQ \tag{5}$$

$$V_{slack}(z) = V_{slack} \tag{6}$$

Należy zauważyć, że zanurzenie holomorficzne, wykorzystane w równaniu (3), implikuje następujące przypadki graniczne:

- rozwiązanie dla $z = 0$ reprezentuje pracę sieci bez obciążeń i generacji w węzłach systemu elektroenergetycznego – jest to tzw. rozwiązanie kiełka (ang. *germ solution*)
- rozwiązanie dla $z = 1$ reprezentuje określenie punktu pracy sieci dla pełnego modelu rozpływowego.

Dodatkową cechą metody jest to, że jest ona metodą rekurencyjną, a nie iteracyjną, jak w przypadku algorytmów klasycznych.

3. Metody rozwiązania problemu

Zastosowanie zanurzenia holomorficznego sprawia, że funkcja $V(z)$ jest funkcją holomorficzną zmiennej zespolonej z. W praktyce oznacza to, że problem rozpływów mocy w systemie elektroenergetycznym za pomocą metody HELM jest rozwiązywany w przestrzeni funkcyjnej, w której zarówno funkcje, jak i zmienne są liczbami zespolonymi. Jedną z metod stosowanych do rozwiązania tego typu problemów jest metoda szeregów potęgowych.

Metoda szeregów potęgowych

Wykorzystując jedną z fundamentalnych cech funkcji holomorficznych, funkcję $V(z)$ można przedstawić w formie szeregu Maclaurina, który jest szczególną postacią szeregu Taylora. W ogólnym przypadku jest to szereg potęgowy o współczynnikach będących funkcjami zespolonymi, zależnymi od zmiennych zespolonych tego szeregu. Postać takiego szeregu jest następująca:

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V[n] \cdot z^n \tag{7}$$

PL

Ponadto dla holomorficznej funkcji $V(z)$ spełnione są następujące zależności, obowiązujące przy rozwinięciu jej w szereg Maclaurina:

$$V^*(z) = V^*[0] + V^*[1]\cdot z^* + V^*[2]\cdot(z^*)^2 + \ldots$$
$$\ldots + V^*[n]\cdot(z^*)^n \tag{8}$$

$$V^*(z^*) = V^*[0] + V^*[1]\cdot z + V^*[2]\cdot z^2 + \ldots$$
$$\ldots + V^*[n]\cdot z^n \tag{9}$$

Ponieważ w równaniu (3) funkcja $V^*(z^*)$ znajduje się w mianowniku, wygodnie jest wprowadzić funkcję $W(z)$ określoną w sposób następujący:

$$W(z) = \frac{1}{V(z)} \tag{10}$$

Z równania (10) wynika bezpośrednio, że:

$$\left(W[0] + W[1]\cdot z + \ldots + W[n]\cdot z^n\right)\cdot$$
$$\cdot\left(V[0] + V[1]\cdot z + \ldots + V[n]\cdot z^n\right) = 1 \tag{11}$$

Mnożąc przez siebie występujące w równaniu (10) szeregi potęgowe, można określić wzory pozwalające wyliczyć wartości funkcyjnych współczynników $W[n]$:

$$W[0] = \frac{1}{V[0]} \tag{12}$$

$$W[n] = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} W[m]\cdot V[n-m]}{V[0]}, \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \tag{13}$$

Na podstawie przedstawionych powyżej zależności możliwe jest obliczenie wartości funkcyjnych współczynników $V[n]$ wg zależności:

$$V[n] = S^*\cdot W^*[n-1], \quad \text{dla} \quad n > 0 \tag{14}$$

Tym samym równanie (3), opisujące stan pracy węzłów typu PQ, przyjmie postać:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k[n] = S_i^*\cdot W_i^*[n-1], \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{15}$$

Kolejnym ze sposobów wykorzystywanych do obliczeń w metodzie HELM jest metoda aproksymacji ułamkiem łańcuchowym (ang. *continued fraction*).

Metoda aproksymacji ułamkiem łańcuchowym
Teoretycznie istnieje wiele sposobów przekształcenia oryginalnego szeregu potęgowego, opisanego równaniem (7), do postaci ułamka łańcuchowego, aproksymującego ten szereg. Jedna z możliwych postaci takiego przekształcenia jest następująca:

$$V(z) = V[0] + V[1]\cdot z + V[2]\cdot z^2 + \ldots + V[n]\cdot z^n =$$
$$= V[0] + z\cdot\left(V[1] + V[2]\cdot z + \ldots + V[n]\cdot z^{n-1}\right) =$$
$$= V[0] + \frac{z}{\dfrac{1}{V[1] + V[2]\cdot z + \ldots + V[n]\cdot z^{n-1}}} =$$
$$= V[0] + \frac{z}{V^{(1)}(z)} \tag{16}$$

Ostatnie wyrażenie z równania (16) można zapisać w formie rekurencyjnego wyrażenia, pozwalającego obliczyć wartość poszukiwanej funkcji $V(z)$:

$$V(z) = V[0] + \cfrac{z}{V^{(1)}[0] + \cfrac{z}{V^{(2)}[0] + \cfrac{z}{V^{(3)}[0] + \ldots}}} \tag{17}$$

Wykorzystując wcześniejsze uwagi, należy zauważyć, że wartość funkcji $V(z)$, określającej napięcia pracy we wszystkich N węzłach sieci, reprezentowanych w modelu rozpływowym, otrzymuje się bezpośrednio z równania (17), przyjmując wartość $z = 1$. Istnieje jeszcze wiele innych metod, które mogą być wykorzystane do rozwiązania zagadnień opisanych w metodzie HELM. Powyżej zostały opisane jedynie najpopularniejsze metody, które znalazły najszersze zastosowanie w publikowanych dotychczas pracach.

4. Sposoby uwzględniania stanów rzeczywistych pracy systemu elektroenergetycznego

Równanie (2) oraz odpowiadające mu zanurzenie holomorficzne (3) opisują stan pracy węzłów typu PQ. Z punktu widzenia praktycznego takie podejście nie jest wystarczające do opisu pełnych rozpływów mocy w rozległym systemie elektroenergetycznym. W pełnym modelu obliczeniowym konieczne jest również odwzorowanie innych rodzajów węzłów czy też urządzeń. Prace nad tymi zagadnieniami są obecnie na etapie wstępnym, ale powstały już pierwsze opracowania uwzględniające złożoność pracy systemu elektroenergetycznego. Postaci zanurzeń holomorficznych może być nieskończenie wiele. Poniżej zaprezentowane zostaną najważniejsze z nich, które doczekały się praktycznej implementacji.

Rozbudowany model węzłów typu *PQ*
W tym modelu z elementów macierzy admitancyjnej Y_{ik} wydzielone zostały dwie części składowe: Y_{ik}^{tr} – część odpowiadająca „gałęziom szeregowym" oraz Y_i^{sh} – część odpowiadająca „elementom poprzecznym" (ang. *shunt elements*). Taka reprezentacja węzłów typu PQ pozwala na odwzorowanie elementów poprzecznych (dławiki, kondensatory itp.) oraz ułatwia modelowanie transformatorów. Równania rozpływowe dla opisywanego przypadku przyjmują postać:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}^{tr}\cdot V_k = \frac{S_i^*}{V_i^*} - Y_i^{sh}\cdot V_i\,, \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{18}$$

Zanurzenie holomorficzne dla równania (18) przyjmie postać:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k(z) = \frac{z\cdot S_i^*}{V_i^*(z^*)} - z\cdot Y_i^{sh}\cdot V_i(z), \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{18a}$$

Natomiast model matematyczny zastosowany w metodzie HELM, odpowiadający równaniu (18a), przyjmie postać:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k[n] = S_i^*\cdot W_i^*[n-1] - Y_i^{sh}\cdot V_i[n-1], \quad \text{dla} \quad i \in PQ \tag{18b}$$

Model węzłów typu *PV*
Dla węzłów typu PV znane są: moduł napięcia $|V_i|$ oraz wyjściowa moc czynna P_i. Wielkościami nieznanymi są: kąt napięcia oraz moc bierna węzłowa Q_i. Odpowiednie równania dla zanurzenia holomorficznego, reprezentujące sposób obliczenia mocy biernej, można zapisać w sposób następujący:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k(z) = \frac{z\cdot S_{iconst}^* - jQ_i(z)}{V_i^*(z^*)} - z\cdot Y_i^{sh}\cdot V_i(z), \quad \text{dla} \quad i \in PV \tag{19}$$

gdzie: S_{iconst}^* jest sprzężoną wartością stałej (niezmiennej) mocy S_i węzła i.

Model matematyczny zastosowany w metodzie HELM, odpowiadający równaniu (19), przyjmie postać:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik}\cdot V_k[n] + jQ_i[n] =$$
$$= S_{iconst}^*\cdot W_i^*[n-1] - j\left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m]\cdot W_i^*[n-m]\right) -$$
$$-Y_i^{sh}\cdot V_i[n-1], \quad \text{dla} \quad i \in PV \tag{19a}$$

Jednocześnie zanurzenie holomorficzne, przedstawiające warunek znajomości modułu napięcia $|V_i|$, można zapisać w postaci:

$$V_i(z)\cdot V_i^*(z^*) = 1 + z\cdot\left(\left|V_i^{zad}\right|^2 - 1\right), \quad \text{dla} \quad i \in PV \tag{20}$$

gdzie: V_i^{zad} jest wartością napięcia zadanego w węźle i.

Model matematyczny zastosowany w metodzie HELM, odpowiadający równaniu (20), przyjmie postać:

PL

$$V_i^{re}[n]=\begin{cases} 1, \quad \text{dla } n=0, \\ \dfrac{\left(V_i^{zad}\right)^2-1}{2}, \text{dla } n=1, \\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{n-1} V_i[m]\cdot V_i^*[n-m], \text{dla } n=2,3,\dots n\text{-}1 \end{cases}$$

$$\text{dla} \quad i\in PV \tag{21}$$

Zaprezentowane powyżej równania stanowią zaledwie niewielką reprezentację modeli matematycznych, które składają się na opis złożonych procesów zachodzących w rzeczywistym systemie elektroenergetycznym. Prace nad powyższymi zagadnieniami dopiero się rozpoczęły. Należy mieć nadzieję, że z każdym nowym opracowaniem biblioteka dostępnych modeli, pozwalająca na ich reprezentację i zastosowanie w metodzie HELM, ulegnie wzbogaceniu.

5. Przykłady obliczeniowe

W celu przetestowania skuteczności działania metody HELM wykonano analizy porównawcze z profesjonalnym programem do obliczeń rozpływów mocy PSS®E firmy Siemens PTI. Do obliczeń wykorzystano standardowe modele 3-, 14- i 118-węzłowe IEEE. Modele zostały dostosowane do specyfiki opracowanych dotychczas i opisanych wcześniej zanurzeń holomorficznych. Z tego powodu w modelach IEEE zablokowano np. możliwość regulacji przekładni transformatorów. Zachowane zostały wszystkie ograniczenia i wymagania dla węzłów typu *PV*, takie jak: ustalone poziomy napięć i limity mocy biernych generatorów. Obliczenia w programie PSS®E firmy Siemens PTI były wykonywane z wykorzystaniem pełnej metody Newtona-Raphsona.

Obliczenia wykonano na komputerze z procesorem Intel® Core™ i7-6700 HQ 2,6GHz, z 64-bitowym systemem operacyjnym MS Windows 10 Pro. Algorytm metody HELM został napisany w języku Python 3.6.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń porównawczych zamieszczono w tab. 1.

Model	PSS®E		HELM	
	Użycie CPU [ms]	Dokładność [MVA]	Użycie CPU [ms]	Dokładność [MVA]
3-bus	38,823	5,960E-06	24,495	3,786E-05
14-bus	63,732	2,227E-05	42,536	4,413E-12
118-bus	56,567	4,134E-04	300,137	1,333E-08

Tab. 1. Analiza porównawcza obliczeń rozpływowych dla programu PSS®E i metody HELM

6. Wnioski

Metoda HELM jest całkowicie nową i nowatorską metodą rozwiązywania równań opisujących stany ustalone systemów elektroenergetycznych. Pierwsze prace teoretyczne wskazują na duży potencjał oraz możliwości aplikacyjne opisywanej metody. Potwierdzają to również obliczenia przeprowadzone przez autora. Wyniki zaprezentowane w tab. 1 dowodzą, że:

- metoda HELM charakteryzuje się dużą dokładnością wykonywanych obliczeń, bez względu na wielkość analizowanej sieci
- dla sieci o niewielkiej liczbie węzłów czas obliczeń jest porównywalny lub lepszy niż w metodach klasycznych
- wraz ze wzrostem wymiarowości problemu znacząco wzrasta czas obliczeń w metodzie HELM.

Należy jednak pamiętać, że czas obliczeń w metodzie HELM schodzi na drugi plan. O wiele istotniejsze są cechy analizowanej metody, wynikające z zastosowania zanurzenia holomorficznego i „przeniesienia" problemu rozpływów mocy na płaszczyznę liczb zespolonych C, przy jednoczesnym zanurzeniu oryginalnych równań algebraicznych w ich funkcjonalne holomorficzne rozszerzenie. Jednoznaczność rozwiązania (lub jego braku), uzyskana dzięki takiej transformacji, pozwala optymistycznie myśleć np. o możliwościach zastosowania metody HELM w systemach czasu rzeczywistego, wykorzystywanych do sterowania pracą złożonego systemu elektroenergetycznego.

7. Kierunki przyszłych prac

Prace teoretyczne i rozwojowe nad metodą HELM są obecnie na wczesnym etapie. Dotychczas w zadowalający sposób zostały opracowane zaledwie niektóre zagadnienia, które są niezbędne do stworzenia w pełni funkcjonalnej metody obliczania rozpływów mocy w rzeczywistych systemach elektroenergetycznych. Za krytyczne elementy, niezbędne do opracowania teoretycznego, należy uznać:

- stworzenie modeli elementów regulacyjnych, takich jak transformatory z regulacją przekładni, przesuwniki fazowe, urządzenia typy FACTS itp.
- stworzenie modeli odzwierciedlających różnorodną pracę obciążeń (model prądowy, admitancyjny itp.).

Na równi z opracowywaniem modeli elementów składowych systemu elektroenergetycznego należy uznać konieczność poszukiwania nowych i bardziej wydajnych metod obliczania zmiennych funkcyjnych, będących rozwiązaniem problemu rozpływów mocy w metodzie HELM. Dokładność aproksymacji rozwiązania funkcyjnego oraz szybkość działania odgrywają istotną rolę w procesie obliczeń i decydują o skuteczności i wydajności całej metody.

Na zakończenie należy wspomnieć o tym, że metoda HELM została skomercjalizowana i obecnie prawa do niej posiada firma Gridquant Inc. Według informacji handlowych firma ta oferuje w pełni funkcjonalną wersję programu, pozwalającą prowadzić obliczenia dla bardzo dużych sieci elektroenergetycznych. Jednak sposób działania tego programu oraz szczegóły dotyczące sposobu modelowania poszczególnych elementów sieciowych są tajemnicą handlową przedsiębiorstwa. Dodatkowym argumentem mobilizującym do intensyfikacji prac badawczych jest bardzo wysoka cena, jakiej firma Gridquant Inc. żąda za program, i dotyczy to również wersji akademickiej.

Bibliografia

1. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2004/0158417 A1, Pub. Date: Aug. 12, 2004.
2. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2006/0111860 A1, Pub. Date: May 25, 2006.
3. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2009/0228154 A1, Pub. Date: Sep. 10, 2009.
4. Trias A., System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks, United States Patent, Patent No.: US 7,979,239 B2, Date of Patent: Jul. 12, 2011.
5. Trias A., The Holomorphic Embedding Load Flow Method, 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting, July 2012, s. 1–8, ISSN: 1932-5517, doi: 10.1109/PESGM.2012.6344759.
6. Subramanian M.K., Feng Y., Tylavsky D., PV bus modeling in a holomorphically embedded power-flow formulation, 2013 North American Power Symposium (NAPS), September 2013, doi: 10.1109/NAPS.2013.6666940, s. 1–6.
7. Baghsorkhi S.S., Suetin S.P., Embedding AC Power Flow with Voltage Control in the Complex Plane: The Case of Analytic Continuation via Padé Approximants, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1504.03249, 2015, arXiv: 1504.03249 [online], http://arxiv.org/abs/1504.03249 [dostęp: 21.11.2016].
8. Trias A., Fundamentals of the Holomorphic Embedding Load-Flow Method, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1509.02421, 2015, arXiv: 1509.02421 [online], http://arxiv.org/abs/1509.02421 [dostęp: 21.11.2016].
9. Suetin S.P., Baghsorkhi S.S., Embedding AC Power Flow in the Complex Plane Part I: Modelling and Mathematical Foundation, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1604.03425, 2016, arXiv: 1604.03425 [online], http://arxiv.org/abs/1604.03425 [dostęp: 21.11.2016].
10. Rao S. i in., The Holomorphic Embedding Method Applied to the Power-Flow Problem, *IEEE Transactions on Power Systems* 2016, Vol. 31, No. 5, s. 3816–3828, doi: 10.1109/TPWRS.2015.2503423.
11. Trias A., Marín J.L., The Holomorphic Embedding Loadflow Method for DC Power Systems and Nonlinear DC Circuits, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 2016,

PL

Vol. 63, No. 2, s. 322–333, doi: 10.1109/TCSI.2015.2512723.

12. Wallace I. i in., Alternative PV Bus Modelling with the Holomorphic Embedding Load Flow Method, arXiv e-prints, July 2016, arXiv: 1607.00163 [online], https://ui.adsabs.harvard.edu/\#abs/2016arXiv160700163W [dostęp: 17.10.2017].
13. Basiri-Kejani M., Gholipour E., Holomorphic Embedding Load-Flow Modeling of Thyristor-Based FACTS Controllers, *IEEE Transactions on Power Systems* 2017, Vol. 32, No. 6, s. 4871–4879, ISSN: 0885-8950, doi: 10.1109/TPWRS.2017.2682117.
14. Liu C. i in., A Multi-Dimensional Holomorphic Embedding Method to Solve AC Power Flows, *IEEE Access* 2017, Vol. 5, s. 25270–25285, ISSN: 2169-3536, doi: 10.1109/ACCESS.2017.2768958.
15. Santos A.C., Freitas F.D., Fernandes L.F.J., Holomorphic embedding approach as an alternative method for solving the power flow problem, 2017 Workshop on Communication Networks and Power Systems (WCNPS), November 2017, s. 1–4, doi: 10.1109/WCNPS.2017.8252933.
16. Sauter P.S. i in., Comparison of the Holomorphic Embedding Load Flow Method with Established Power Flow Algorithms and a New Hybrid Approach, March 2017 Ninth Annual IEEE Green Technologies Conference (GreenTech), 2017, s. 203–210, ISSN: 2166-5478, doi: 10.1109/GreenTech.2017.36.
17. Trias A., Marín J.L., A Padé-Weierstrass technique for the rigorous enforcement of control limits in power flow studies, Computing Research Repository (CoRR), Vol. abs/1707.04064, 2017, arXiv: 1707.04064 [online], url: http://arxiv.org/abs/1707.04064, [dostęp: 13.07.2017].
18. Chiang H., Wang T., Sheng H., A Novel Fast and Flexible Holomorphic Embedding Power Flow Method, *IEEE Transactions on Power Systems* 2018, Vol. 33, No. 3, s. 2551–2562, ISSN: 0885-8950, doi: 10.1109/TPWRS.2017.2750711.
19. Feng Y., Tylavsky D., A Holomorphic embedding approach for finding the Type-1 power-flow solutions, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 2018, Vol. 102, s. 179–188, ISSN: 0142-0615, doi: 10.1016/j.ijepes.2018.04.029.
20. Liu C. i in., Online Voltage Stability Assessment for Load Areas Based on the Holomorphic Embedding Method, *IEEE Transactions on Power Systems* 2018, Vol. 33, No. 4, s. 3720–3734, ISSN: 0885-8950, doi: 10.1109/TPWRS.2017.2771384.

Andrzej Mieczysław Wędzik
dr inż.
Politechnika Łódzka, Instytut Elektroenergetyki
e-mail: andrzej.wedzik@p.lodz.pl

Absolwent Politechniki Łódzkiej. Od 1986 roku pracuje w Instytucie Elektroenergetyki swojej macierzystej uczelni, obecnie na stanowisku adiunkta. Jego działalność naukowo-badawcza koncentruje się na zagadnieniach związanych z energetyką odnawialną, prawem energetycznym, rynkiem energii i optymalizacją. Od 2007 roku jest przewodniczącym Centralnej Sekcji Energetyki Odnawialnej i Ochrony Środowiska SEP.